【研究論文】
（査読なし）

「比例」関係操作を基盤とした図形公式（平行四辺形の求積公式・円周公式）理解に関する構成法的研究

斎藤 裕 [1*]

ある公式がわかるということは，その公式に数値を入れて計算できるということだけではなく，「ある変数の値が変化すると，一定の法則に従ってもう一方の変数も変化する」ことがわかるということを意味する。「比例」はまさに「２変数間の関係把握」がその理解の基本であり，三角形や四角形の面積や円周の公式はまさに「比例」関係式である。「比例」における「関係操作」理解が進めば，これらの問題に対しても同様な思考が可能となっていくのではないだろうか。本研究は，これらの公式において「関係操作」ができることが重要であるならば，その公式の基本形式である「比例」における「関係操作」の適用型として理解できることが最も近道であるとして，構成法的研究を行ったものである。

結果，以下のことが明らかとなった。１－１．これらの公式が「比例」関係であることを認知させるのは，ただその形式の類似性を示すだけでは無理で，①その「きまり」を明示すること，②公式におけるその「きまり」を「数値操作」とともに確認する必要がある。１－２.「問い」を出しっぱなしにするのではなく，①「答え」を即時的にフィードバックすること，②「板書」等も活用し，学習者に全て委ねるのではく「教授－学習活動」を丁寧に行う必要がある。２．比例「関係操作」を見ると，「倍のきまり・増のきまり」があり，後者の方が難しく，後者を重点的に教授する必要がある。３.「倍のきまり・増のきまり」においてその問いの方向（順・逆）があり，「逆」方向の思考は難しい。そのために特に「逆」方向の「適用訓練」を行う必要がある。これらの点を今後考慮していけば，三角形や四角形の求積や円周の公式の「関係操作」が容易となっていくと考えられる。

キーワード：比例　関係操作　平行四辺形の求積公式・円周公式　構成法的研究

問題と目的

算数（数学）教育において様々な「公式」を理解・活用できるようにすることが，その目標の１つであろう。では，「公式を活用できる」とは，いかなる操作ができること意味するのだろうか。麻柄啓一（2009）は，公式を「数値を代入して答えを出すためのもの」と捉えている学習者がいるならば，数学教育にとって重大な問題だと指摘している。「公式」は変数間の関係を表したものであり，その関係性の理解も含めて公式の理解であるはずだからである。麻柄（2009）は「数値操作」（公式に数値を代入して答えを算出する操作）と「関係操作」（変数間の関係に着目して答えを導く操作）の２種の「操作」を規定し，特に後者の重要性を指摘している。つまり，ある公式がわかるということは，その公式に数値を入れて計算できるということだけではなく，「ある変数の値が変化すると，一定の法則に従ってもう一方の変数も変化する」ことがわかるということが重要ということである。

しかし，現実には，公式に数値を代入して答えを求めることができても，この「関係操作」つまり，公式の変数間の関係に基づく問題に対しては「解くことができない」事態が見られる。その代表的な問題が「等周長問題」である。この問題は，正方形（あるいは長方形）の各辺の長さを同じに保ったまま押しつぶして「ひし形」

[1] 新潟県立大学人間生活学部子ども学科
*責任著者　連絡先：ysaito@unii.ac.jp
利益相反：なし

（もしくは平行四辺形）に変形させた場合，その面積はどうなるかが問われる問題である。この問題については工藤与志文・白井秀明(1991)が詳しく分析しているが，彼らによると，大学生において 1)平行四辺形の求積公式は再生できる，しかし，2)「この問題では高さがわからないから公式は使えない」という誤答が頻出する,という事実が確認されている。この事実は，被験者となった大学生でも，公式を「変数間の関係を表したもの」とは考えず,「数値を代入して答えを出すもの」と捉えていることを表していよう。同様に，岡田いずみ・麻柄啓一(2013)は平行四辺形や三角形の求積公式を調査し，小学校高学年では，その求積公式を用いての面積計算は８割以上が正答できるのにもかかわらず，公式にある２変数（高さと面積）の対応関係を理解できているものは半数以下だったという事実も示している。また,進藤聡彦・麻柄啓一(2013)は，FIGURE２に示される問題を大学生に解かせたところ，円周と直径の関係において「数値がなくとも公式が使える」と考える大学生は約５割だったとも報告している。

「変数間の関係性」の理解が重要な公式として「比例」がある。

〔比例〕

変数 x と y が 0 でない定数 k を用いて「y = k × x」と書かれるとき， y は x に比例するという〔「k = y／x 」を「比例定数」(proportionality constant) という〕。

「比例」はまさに「２変数間の関係把握」がその理解の基本であり，その性質として

1)右辺の値（ｘ）がｎ倍になれば左辺の値（ｙ）もｎ倍となる（ｙがｐ倍になればｘもｐ倍となる）

2)右辺の値（ｘ）がａ増えれば左辺の値（ｙ）はｋ〔定数〕×ａ増える（ｙがｂ増えた時ｘはｂ÷ｋ増える）

の２点がある。

この性質を理解できている，つまりは「２変数間の関係操作を自由に行えること」が「比例」を理解できていると言えよう。

このような比例関係は様々な領域で存在している。例えば，三角形や平行四辺形の求積公式も「比例関係」式である。また，等速直線運動における移動距離と経過時間も，固定抵抗器を流れる電流と電圧の関係（オームの法則），圧力が一定である時の気体の体積と温度との関係（シャルルの法則）も比例関係である。これらの公式を単に「数値を代入し答えを求めるもの」として理解するのでなく,「比例」の一種として捉えその性質までも理解する－２変数間の関係を自由に操作できる－ことが，まさにその公式の理解・活用と言えるのではないだろうか。

以上のような観点から，本研究では「比例関係」にあるものとして，

Ⅰ基本型；支払金額＝１本（個）当りの値段〔比例定数〕×本（個）数

Ⅱ平行四辺形の面積＝高さ×底辺

Ⅲ円周＝π×直径

を取り上げる。

大学生を被験者に，これら３種の式について以下の２点を調べることを目的とする。

1)比例関係に関する「操作」（「比例」の性質）の理解度

2)「比例」についてその性質も含めて教授し，その後，これらの問題に対し操作的思考（関係操作；①ある変数がｎ倍となったらもう一方の変数はどうなるか，②ある変数がｐ増えたら，もう一方の変数はどうなるか,）が可能となっていくかどうか

第１実験

【目的】

大学生を被験者に，前述した３種の式に加えて「速さ（距離＝速さ×時間)」のを加え，それらの「公式」において「数値操作」(公式に数値を代入して答えを算出する操作）と「関係操作」（変数間の関係に着目して答えを導く操作）の２種の操作がどの程度可能かを調べ，その後，「比例」について，その性質も含めて教授し，その後に，これらの領域における公式に関して「比例関係」に基いた関係操作ができるようになるか調べる。

【方法】

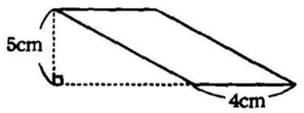
(1) 実験の概要

被験者は，大学生１年生 36 名。

被験者全員に，まず事前テスト問題が配布され，回答が求められる（約 20 分）。その後，テキストが配布され，それを読み・書き込むことで学習を進め（約 30 分），最後に事後テスト問

●計算（公式活用）力問題（事前のみ）

・下の四角形の面積を求めなさい。



・右の円（直径４ｃｍ）の円周を求めなさい。※円周率は“３”としてください。（図ー略）

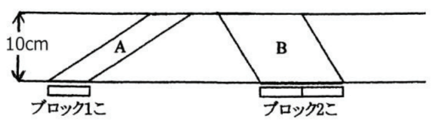
・時速６０ｋｍで３時間走った。どのくらいの距離を走っただろう。

●操作問題（事前・事後）

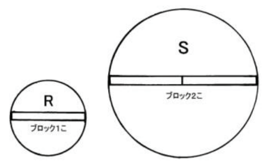
・時速Akmで走っている。「速さ」を変えないで時間を２倍にすると、距離はどうなるだろう（距離＝速さ×時間）。

・一本Ｐ円の缶ジュースを買おうと思う。　買う本数を４倍にしたら、支払う金額はどうなるだろう。

・下のように平行な２本の線がかべに書いてある　。下の線にブロックをあてて、四角形を２つ書いた。ブロックの大きさは全部同じ。Ａの四角形の面積と比べると、Ｂの四角形の面積はどれくらい大きいか。

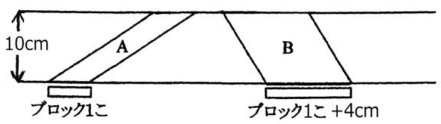


・下のように、円が２つ書いてある。ブロックが直径である。ブロックの大きさは全部同じ。Ｒの円の周長と比べると、Ｓの円の周長の長さはどれくらいか。※円周率は“３”とせよ。

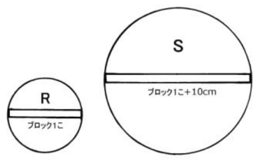


・時速 40 ㎞で走っている。「速さ」はそのままで、５時間長く走ったら、距離はどのくらい増えるか。

・Ａの四角形の面積と比べると、Ｂの四角形の面積はどれくらい大きいか。

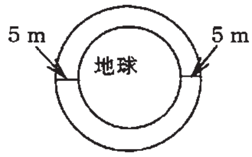


・Ｒの円の周長と比べると、Ｓの円の周長の長さはどれくらい。※円周率は“３”とせよ。



・一本 120 円の缶ジュースを 10 本多く買ったら、支払う金額はどのくらい増えるか。

・地球の周囲（大円）の長さは何千万ｍもある。今、直径をＡｍとして、上空５ｍの所に図のようにすき間を作ってロープを回すと考える。ロープの長さは地球の周囲よりどれくらい長くなるだろうか（地球はピンポン球のような球体だと仮定する）。
ヒント　５ｍの所に図のようにすき間を作るということは、直径が 10m長くなるってことだ。そうすると、その円周はどれだけ長くなるか。



・時速Bkmで走っている。「速さ」はそのままで走った距離が３倍になった。走った「時間」はどうだったか。

・時速 60 ㎞で走っている。「速さ」はそのままで、距離が 120 ㎞長く伸びた。何時間長く走ったのだろうか。

・Ｂの四角形の面積は、Ａの四角形の３倍である。Ｂの四角形の底辺はブロック何個分か。（図ー略）

・Ｓの円周は、Ｒの円周の 1.5 倍である。Ｓの円の直径は、ブロック何個分か。（図ー略）

・一本Q円の缶ジュースを買う。支払い金額が３倍になったら、買った本数はどうなるだろうか。

・Ｂの四角形の面積は、Ａの四角形の面積より 20 ㎝ ^{2} 大きい。Ａの四角形の底辺のブロックは、ブロック１個に何㎝足した長さになっているか。（図ー略）

・Ｓの円周は、Ｒの円周より 30 ㎝長い。　Ｓの円の直径は、ブロック１個に何㎝足した長さになっているか。（図ー略）

・一本 80 円の缶ジュースを買う。支払い金額が 400 円増えた。何本多く買ったのだろうか。

・地球の周囲（大円）の長さは何千万ｍもある。今、その円周に 10mロープを足した。そうすると、どれくらいのすき間ができるだろうか。（図ー略）**ヒント；**新しい円の直径はどれくらいになるだろう。すき間は地球の直径との差の二分の一。

FIGURE 1 第１実験　事前・後テスト問題

題が配布され，それに答える（約15分）ことと なっている。

なお，テスト結果は「斎藤の講義の成績とは何ら関係がないこと」，また提出冊子は無記名であり個人が特定されることはないが，「被験者になることを拒否する権利もある（調査課題に回答しない－調査冊子を白紙で提出する－）権利もあること」等が実験開始前に説明される。実験参加自体，任意である。

(2) テスト問題（※事後テストはⅡ部のみ）－FIGURE１参照

Ⅰ部：計算（公式活用）問題〔数値操作〕３問
1)平行四辺形の面積，2)円周，3)速さと時間と距離

Ⅱ部：関係操作問題４種－速さ・一当たり量・平行四辺形面積・円周（地球含む）
1)ｘがｍ倍→ｙもｍ倍　2)ｘがｐ増→ｙはｋｐ増　3)ｙがｎ倍→ｘもｎ倍　4)ｙがｑ増→ｘはｑ／ｋ増　〔示される回答例；〇（数値）単位・〇倍・求められない・わからない〕

(3) 教授－学習活動：テキスト（Ⅲ部構成－Ａ３・１枚）

Ⅰ比例式（ｙ＝ｋｘ）の理解〔表の穴埋め・「式」の完成〕
事例１；お菓子（1個80円）の購入個数ｘと支払金額ｙ
事例２；速さ一定（70m／分）の時の歩く時間ｘと移動距離ｙ

Ⅱ比例の性質（上記２種）の理解〔数値・文字の埋め込み〕

Ⅲ比例関係の事例紹介

【結果と考察】

(1) 事前テスト

1)計算（公式活用）力〔数値操作〕

３問とも高い正答率が示された（TABLE１）。円周計算のみ４名の誤答者を出しているが，それでも32名が正答している。その誤答者（４名）の内２名は，解答結果より「直径」を「半径」と誤判断していた。「速さ」関係式は10割の正答率である。全体としてみれば，高い正答率と言ってもよい。これらを求める「式」は，本調査参加学生レベルでは十分理解されていると言える。「公式」における数値操作は問題ない。

TABLE 1　計算－公式活用力；正答数（正答率）

平行四辺形面積	円周	速さ・時間→距離
35(97.2)	32(88.9)	36(100)

ｎ＝36

2)比例－関係操作（TABLE２参照）

①「倍」操作

「ｘがｍ倍→ｙがｍ倍」問題では，４領域とも８割以上の正答率である。しかし，「逆」（ｙがｎ倍→ｘがｎ倍）では約１割正答率が下がっている。「倍」操作に関して両変数の関係操作は可能な状況と判断できるが，「逆」操作に関して正答率が下がるところを見ると，被験者の学生らは，必ずしもこの関係を「必要十分条件」的に理解しきれていないとも言える。

②「増」操作

全体的に「増」操作問題は「倍」操作問題に比して正答率が低い。特に「円周」課題を見ると，「倍」操作問題では他領域と遜色ない程度の正答率だったのが，この問題では他３領域と比べて正答率は低い（他３領域の正答率；約７割　円周・正答率；５～６割）。また，「逆」では「倍」問題で約１割正答率が下がっていたが，「増」問題では〔円周；天文問題－地球〕を除き，正答率の下降は見られない。＜速さ＞＜一当たり量＞では高い正答率を示しているが，課題の性質上，問題状況が理解しやすい（速さ；距離÷速さ＝時間　一当たり量；支払金額÷単価＝本数）

TABLE　2　　比例関係の理解－正答数（正答率）の推移　　ｎ＝36

		速さ	一当たり量	平行四辺形	円周	地球
ｘがｍ倍→ｙがｍ倍	事前	32(88.9)	30(83.3)	35(97.2)	32(88.9)	－
	事後	36(100)	36(100)	35(97.2)	35(97.2)	－
ｘがｐ増→ｙがｋｐ増	事前	26(72.2)	27(75)	26(72.2)	18(50)	22(61.1)
	事後	25(69.4)	27(75)	32(88.9)	28(77.8)	27(75)
ｙがｎ倍→ｘがｎ倍	事前	26(72.2)	27(75)	32(88.9)	27(75)	－
	事後	34(94.4)	31(86.1)	33(91.7)	30(83.3)	－
ｙがｑ増→ｘがｑ/ｋ増	事前	31(86.1)	34(94.4)	26(72.2)	21(58.3)	4(11.1)
	事後	34(94.4)	32(88.9)	29(80.6)	26(72.2)	10(27.8)

TABLE 3　学習プロセス；比例関係理解－正答数（正答率）　n＝36

x－倍	x－増	y－倍	y－増	〔数字〕	〔文字〕
31(86.1)	27(75)	35(97.2)	24(66.7)	31(86.1)	22(61.1)

のかもしれない。〔地球〕では正答率の下降が著しいが，実感との乖離が強く反映したのかもしれない。いずれにしても，「数値操作」の高い正答率から見れば，被験者の学生らにおいてこの操作（「増」操作）は「倍」操作以上に「関係操作」を理解されていない状況と言えよう。

(2) 教授－学習活動〔テキスト読解〕

「操作」に関する穴埋め（数・文字）の完答数（率）を TABLE 3に示す。「倍」操作は「逆」でも高い完答率を示すが，「増」操作は全体で６割程度の完答率でしかなかった。比例関係表からの読み取りであったため，＜速さ＞は感覚的に理解できたとしても，それ以外は，論理操作のみで考えて答えなければならない。結果，「増」操作の難しさが際立ってしまったのかもしれない。数字より文字代入の完答率の低さも，そのことを物語っていよう。しかし，数操作でその完答率が８割を超えたという点では，この教授プランで比例関係操作について一定の学習がなされたと考えている。

(3) 事後テスト（TABLE 2参照）

1)「倍」操作

「倍」操作は，「逆」も含めて４種課題とも８割以上の正答率を示している。「逆」－「一当たり量」「円周」でも８割以上の正答率である。事前段階よりもすべての領域で正答率は上昇しており，事前段階で見られた正答率の低下は事後ではさほど見られない。課題種別の別なく「比例関係」の「倍」操作が可能になっていると言える〔$p<.05$（$t=2.50$）；順方向　$p<.05$（$t=2.35$）；逆方向〕。

2)「増」操作

「増」操作では，事前より上昇は見られる〔$p<.01$（$t=3.67$）；円周　$p<.05$（$t=2.65$）；平行四辺形面積・地球－逆　$p<.10$（$t=1.6$）円周－逆・地球〕が，相変わらず，「倍」操作より正答率は低い。また，円周（地球含む）が他の３種課題よりやや低い正答率である。この結果を見ると，「比例関係」に関する一定の学習効果は見られたが，その効果は限定的であったと言わざるを得ない。特に地球問題では，順方向では75％の正答率なのに，逆方向で極端に低い正答率であった。「実感の乖離」だけではない問題があるのかもしれない。

【全体考察】

テスト結果を見ると，「数値操作」は調査課題４領域において殆どの被験者・大学生は問題なくできている。しかし，今回の調査４種課題・公式が「比例」関係の式である以上，その性質である２種類の関係操作；「倍・増」操作とも可能であることが，その「式」の理解として重要と考えている。その点についての事前テストの結果を見ると，1)４種とも「倍」操作は順方向は可能だが，逆方向は躓く者が多い，2)「増」操作は「倍」操作より難しく，種別により差がある，ことがわかった。

この点を改善すべく，図形「求積」公式も円周公式も「比例」関係公式である以上，その公式の操作的理解に，比例関係の学習が効果があると考え，教授－学習活動（テキスト読解方式）を行ったが，その効果は限定的であった。

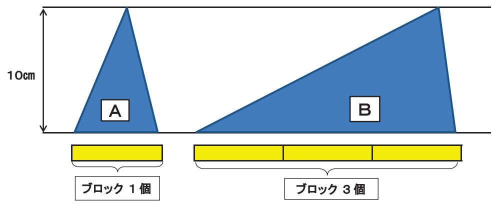
今回の教授－学習活動が，1)比例操作をルール化して提示していない，2)回答のフィードバックがない，3)操作のルールを広い領域で確認していない（言語的明示に終始した），が問題なのかもしれない。今後これらの点を改善し，「比例」関係の学習を用いた操作的思考・援助の試みを続けていきたい。

第２実験

【目的】

第１実験では，学習者の，図形「求積」公式も円周公式における「関係操作」理解が十分なものとは言えなかった。そこで，前実験の結果を踏まえ，これらの領域において十分な「関係操作」ができるよう，教授ストラテジーに以下のような改良を加え，その有効性を検討する。なお，「比例」関係操作を基盤として図形公式（平行四辺形の求積公式・円周公式）」理解を図る路線はそのままとする。

・下のように平行な２本の線が壁に引かれている。下の線にブロックを当て三角形を２つ書いた。ブロックの大きさは全部同じ。Aの三角形の面積と比べると、Bの三角形の面積はどれくらい大きいか。

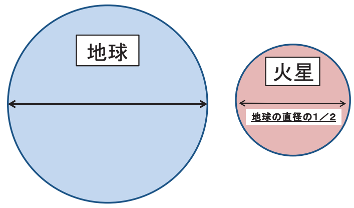


・Cの三角形の面積と比べると、Dの三角形の面積はどれくらい大きいか。(平行な２本の線が壁に引かれ、下の線にブロックを当て三角形を２つ書いた。; Cの三角形の底辺はブロック１個。Dの三角形の底辺は、ブロック１個＋２㎝〔小ブロック１個〕) －図略

・Fの三角形の面積は、Eの三角形の２倍（平行な２本の線が壁に引かれ、下の線にブロックを当て三角形を２つ書いた)。Eの三角形の底辺はブロック１個。Fの四角形の底辺は、ブロック何個分か。(Eの四角形の底辺はブロック１個) －図略

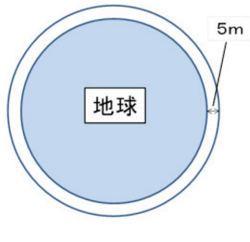
・Hの三角形の面積は、Gの三角形の面積より３０㎠大きい。Hの三角形の底辺のブロックは、ブロック１個に何㎝足した長さになっているだろう（平行な２本の線が壁に引かれ、下の線にブロックを当て三角形を２つ書いた。Gの三角形の底辺はブロック１個) －図略

・地球と、火星との大きさ比べである。火星は、地球より小さく、直径が地球の“１／２（０．５倍）”。地球の周長（一周ぐるっと回る時の距離）と比べて、火星の周長はどれくらいか。



・今度は、地球と木星の大きさ比べである。木星は地球よりはるかに大きく、周長が地球の“１２倍”。では、直径は地球と比べて、どれくらいだろうか。－図略

・地球の周長（一周ぐるっと回る時の距離）は何千万mもある。今、直径をAmとする。上空５mの所に図のようにすき間を作ってロープを回すと考えよ。ロープの長さは地球の周囲よりどれくらい長くなるだろうか(地球はピンポン球のような球体だと仮定する)。ヒント;５mの所に図のようにすき間を作るということは､直径が10m長くなるってこと。その円周はどれだけ長くなるかな。



・今度は、逆の問題。地球の周長に６mロープを足した。そうすると、どれくらいのすき間ができるだろうか。ヒント；新しい円の直径はどれくらいになるだろう。すき間は地球の直径との差の二“１／２（０．５倍）”。－図略

FIGURE ２　第２・３実験　事前・後テスト問題；三角形求積及び円周（天文問題）

・改良点

１　比例操作（「倍」操作・「増」操作）をルール化して提示

２　回答をフィードバックする

３　操作のルールを問題となる領域で確認する

【方法】

(1)　実験の概要

被験者は，大学２年生 34 名。第１実験に参加した者とは異なる学生である。概要は，第１実験と同様である。

(2)　テスト問題－FIGURE２参照

関係操作課題－３領域＜一当たり量・三角形面積・円周（天文分野；地球・火星・木星）＞ 1)「倍」操作【ｘが（も）ｎ倍⇔ｙも（が）ｎ倍】，2)「増」操作【ｘがｐ増→ｙはｋｐ増・ｙがｑ増→ｘはｑ／ｋ増】。

(3)　比例関係に関する教授－学習活動（Ａ４用紙４枚）

ⅰ一当たり量の変化表（ｘ・ｙ）の提示と穴埋め及びその表から導いた「比例式」の説明。

ⅱ「倍」の関係について；穴埋め（答えの提示及び「きまり」の明示。

ⅲ「増」の関係について；穴埋め（答えの提示）及び「きまり」の明示。

ⅳ「比例」事例の展開；

①「円の直径と円周の関係」公式も比例関係式であり，上記のきまりが成り立つことを明記。

②「三角形の求積」公式も比例関係式であり，上記のきまりが成り立つことを事例として提示（計算で確認)。

③「平行四辺形の求積」公式も比例関係式で，上記のきまりが成り立つこと，また電気分野の「オームの法則」も同様で，数学・理科分野で「比例関係式」は多くあり，その関係ならば上記の２つのきまりが成り立つことを説明。

【結果と考察】

(1)　事前テスト：３領域における関係操作の理解－TABLE４参照

TABLE 4　各問題群の回答傾向（事前・事後）　n=34

事前 (n=34)		一当たり量				三角形の面積				円周			
		倍		増加		倍		増加		倍		増加	
		x→y	y→x	x増→y？	y増→x？	x→y	y→x	x増→y？	y増→x？	x→y	y→x	x増→y？	y増→x？
正答（率）		28 (82.4)	31 (91.2)	31 (91.2)	31 (91.2)	33 (97.1)	31 (91.2)	23 (67.6)	26 (76.5)	24 (70.6)	28 (82.4)	12 (35.3)	9 (26.5)
誤答	求められない	0	2	0	2	0	2	0	0	0	0	1	0
	わからない	0	1	0	1	0	0	1	2	1	2	5	11
	その他（誤値）	6	0	3	0	1	1	10	6	9	4	16	14

事後 (n=34)		一当たり量				三角形の面積				円周			
		倍		増加		倍		増加		倍		増加	
		x→y	y→x	x増→y？	y増→x？	x→y	y→x	x増→y？	y増→x？	x→y	y→x	x増→y？	y増→x？
正答（率）		30 (88.2)	34 (100)	31 (91.2)	30 (88.2)	34 (100)	34 (100)	24 (70.6)	29 (85.3)	28 (82.4)	33 (97.1)	17 (50.0)	16 (47.1)
誤答	求められない	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1
	わからない	0	0	0	1	0	0	2	1	0	0	2	4
	その他（誤値）	4	0	3	2	0	0	8	4	6	1	15	13

比例操作の基本となる「一当たり量」問題は，「倍」操作「増」操作とも正答率は高い。しかし，三角形「求積」問題では「増」操作はやや低く，「円周」問題では，両操作とも低く，「増」操作の正答率は著しく低い。

この結果から，学習者である大学生において

1)「一当たり量」としての比例操作は理解しているが，それは他領域には拡がっていない，つまり，それぞれの「公式」(図形－求積公式，円周公式）を「比例」関係と同様な性質を持っているとは考えていない，ということがわかる。

2)たとえ，上記の公式を「比例」的性質を持っていると思っていたとしても，その操作では，「順・逆」に関係なく「増」操作の方が「倍」操作より難しい，ということがわかる。

この結果は，第１実験とほぼ同様と言ってよいだろう。

(2) 教授－学習活動－TABLE５参照

「穴埋め」(「倍」操作「増」操作－「順・逆」)は殆どの学生が正答である。この活動は「一当たり量」領域での比例操作学習であり，この領域における事前テストでの高成績からも見ても，本実験参加の学生の多くはこの領域では「比例－関係操作」を理解していると言える。

TABLE 5　教授－学習中の学習者の回答；正答数（率）

x：２倍→ y：？倍	x：？倍 ←y：４倍	x：２個増→ y：？円増	x：？個増 ←y：240円増
33（91.7）	33（91.7）	31（86.1）	32（88.9）

n=34

(3) 事後テスト：３領域における関係操作の理解－TABLE４参照

1)「倍」操作；円周問題でも高い正答率となっている。

この操作は教授－学習活動を経て，領域を超えて可能となったと思われる。

2)「増」操作；「三角形面積」「円周」問題とも事前から事後へ正答率の上昇は見られる（10％水準－三角形面積：ｙがｑ増→ｘはｑ／ｋ増，円周：ｘがｐ増→ｙはｋｐ増　５％水準－円周：ｙがｑ増→ｘはｑ／ｋ増)。

しかし，円周問題は，他領域問題と比して低正答率である。また今回，正答率の低さは「順・逆」に違いは見られていない。

【全体考察】

この結果は，第１実験に引き続いて，「比例」関係操作を基盤とした図形公式（平行四辺形の求積公式・円周公式）理解において「増」操作は「倍」操作よりも難しい，という事実を示している。

今回，第１実験と異なり，「円周」問題は「天文分野」での出題のみである。「地球」「火星」「木星」だからと言って「倍」操作は「順・逆」操作関係なく，他分野同様の正答率がでている。その意味では，「円周」問題における「比例関係－増操作」がより一段と難しいと思われる。

第２実験は，第１実験の結

果；1）４種とも「倍」操作は順方向は可能だが，逆方向は躓く者が多い，2）「増」操作は「倍」操作より難しく，種別により差がある，を受けて，その改善をすべく行ったものである。今回の学習者（大学生）において事前テストの結果が「倍」操作・「増」操作とも「順・逆」方向の正答率に差は見られていないことも影響しているのかもしれないが，第２実験では「問いの方向」による理解の困難性は事後において見られない。むしろ，「『増』操作は『倍』操作より難しい」ことが明白となったと言えよう。

第２実験では第１実験を踏まえて，

１．比例操作（「倍」操作・「増」操作）をルール化して提示
２．回答をフィードバックする
３．操作のルールを問題となる領域で確認する

を行っている。

にもかかわらず，十分な改善は見られなかったと言うことである。その原因を考えてみる。

教授－学習活動を振り返って見ると，

１．比例操作（「倍」操作・「増」操作）をルール化して提示し，かつ「数操作（フィードバック有）」をして確認はしているが，焦点となる図形公式（平行四辺形の求積公式・円周公式）においてルールの提示に留まり，「数値操作」での確認がなかった

２．あくまで「テキスト読解」方式の教授－学習活動であり，その学習をすべて被験者（学習者）に任せてしまっていた

の２点が，問題と考えられる。今後これらの点を改善し，図形公式（平行四辺形の求積公式・円周公式）において「比例」関係の学習を用いた操作的思考・援助の試みを続けていきたい。

第３実験

【目的】

前実験で「比例関係」を「一当たり量」的理解から他領域（三角形／四角形の面積・円周）の公式まで拡げるためには，その公式において「関係操作」を「数値操作」と関係づけることの重要性が確認された。また第１・２実験と実験スタイルとして「テキスト読解・自学自習方式」を採ってきた。そのために，その結果はそのスタイルの限界なのか，「一般形」として上記の法則を図形領域にまで拡げることの限界なのか，判別しえない。したがって第３実験では，「比例；増－操作に焦点を当てて，そのルールを両図形公式（「面積」「円周」）に数値操作で保証しつつ説明を行う」テキスト内容を実験者が「授業」し，その内容（図形－三角形／四角形の求積公式・円周公式－における「関係操作的理解」学習）に「比例関係法則」適用の効果があるのかないのかを確かめることにする。

【方法】

(1)　実験の概要

被験者は，大学１年生 18 名。第１・２実験に参加した者とは異なる学生である。今回は，「授業」を行うため，研究者（斎藤）の講義終了時に実験の趣旨を口頭で話し，協力をお願いした。協力をお願いした学生は子ども学科学生である。

・<u>実験の趣旨－説明内容</u>

①小学校「算数」の内容であること
②調査課題に解答してもらうが，1）個人は特定されず，2）研究者の担当科目の成績とは何ら関係しないこと
③実験の性質上，上記「算数」の内容に関する「授業」（20 分程度）を受けてもらうこと
④調査課題の解答に際しては，研究者ではない第３者が行い，「授業」は研究者が行うこと

事前・事後調査（テスト）は，一斉に冊子に解答するという形式で行われる。被験者全員に，まず事前テスト問題が配布されて回答が求められる（約 15 分）。その後，教授－学習活動が行われ（約 30 分），最後に事後テスト問題が配布され，それに答える（約 15 分）こととなる。

(2)　テスト問題－第２実験と同じ

関係操作課題－３領域＜一当たり量・三角形面積・円周（天文分野；地球・火星・木星）＞

1）「倍」操作【ｘが（も）ｎ倍⇔ｙも（が）ｎ倍】，

2）「増」操作【ｘがｐ増→ｙはｋｐ増・ｙがｑ増→ｘはｑ／ｋ増】。

(3)　比例関係に関する教授－学習活動（Ａ４用紙４枚）

1）教授－学習内容；

第１・２実験同様，比例関係に関する２つの

性質〔1.「倍」の関係のきまり；一方の変数（x）がn倍になれば，もう一方の変数（y）もn倍になる，2.「増（減）」の関係のきまり；xがp増えると，yは k［定数］×p増える。yがq増える時， xはq÷k増える〕を「一当たり量＜基本「比例」公式＞」から「平行四辺形の求積公式」及び「円周公式」まで拡張・適用する。

2）教授－学習活動；

今回は，「配布されたテキストに答えながら，その説明を聴く」というスタイルである。

①まず「支払金額＝１本（個）当りの値段×本（個）数」箇所において「穴埋め」形式で答えが求められ，その後，それぞれのルールが「板書」され，同時に「読み上げ」られる。

②続いて「平行四辺形の求積公式」・「円周公式」において，

ⅰ）その公式が板書され，「比例」型であることが説明（読み上げ）される。

ⅱ）「きまり」に対応する箇所について計算指示及び答え合わせ・対応するきまりの「読み上げ「が行われる。

ⅲ）最後に，様々な「公式」（「速さ［速さ・距離・時間］」「オームの法則［電流・電圧・抵抗］」など）も全て「比例関係」として纏められ，上記のきまりが適用できるとして説明（対応箇所の読み上げ）されて授業が終わる。

【結果と考察】（TABLE６－８参照）

（1）事前テスト

1）「倍」操作；

①「円周・逆操作」以外正答者は多い。ただ，「円周・逆操作」であっても正答率 77。8%（14／18）であり，極端に悪いという程でもない。

②３課題で「求められない」「わからない」誤答は少ない。誤答は，殆ど「計算ミス」である。

2）「増」操作；

1）基本の「比例」関係式である「一当たり量」問題は高い正答率を示しているが，三角形求積問題・円周問題では，「倍」問題に比して低正答率である。

2）これら２問題では「求められない」「わからない」誤答が目立つ。「比例」関係操作を基盤とした図形公式（平行四辺形の求積公式・円周公式）において「増」操作は「倍」操作よりも難しいというこれまで同様の結果である。

（2）事後テスト

1）「倍」操作；

事前同様，「円周・逆操作」正答者数がやや少ない。しかし，正答者は 15 名おり，他問題と比して大きく正答者を減らしているわけではない。

2）「増」操作；

事前から事後へ正答数の上昇が見られる。また，「求められない」という誤答はなくなっており，教授－学習活動の効果と考えられる。しかし，「逆」方向において「計算ミス」の誤答が多

TABLE 6　各課題群の回答傾向（“倍”問題） n=18

回答＼問題		一当たり量				三角形の面積				円周			
		x →y		y→ x		x →y		y→ x		x →y		y→ x	
		事前	事後	事前	事後	事前	事後	事前	事後	事前	事後	事前	事後
正答		16	16	17	17	18	18	17	18	17	18	14	15
誤答	求められない	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
	わからない＋NR	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1
	計算ﾐｽ（式のみ含）	2	2	0	1	0	0	0	0	0	0	3	2
	倍 ⇔ 値	2	2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0

TABLE 7　各課題群の回答傾向（“増”問題） n=18

回答＼問題		一当たり量				三角形の面積				円周			
		x →y		y→ x		x →y		y→ x		x →y		y→ x	
		事前	事後	事前	事後	事前	事後	事前	事後	事前	事後	事前	事後
正答		15	17	16	17	9	13	10	11	12	16	8	9
誤答	求められない	1	0	1	0	5	0	4	0	2	0	2	0
	わからない＋NR	2	0	0	0	0	0	0	2	1	1	4	0
	計算ﾐｽ（式のみ含）	0	1	1	1	4（20㎠；2）	5（20㎠；3）	4（3㎝；3）	5（3㎝；4）	3	1	4（2m；1）	9（2m；6）
	倍 ⇔ 値	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0

TABLE 5　教授－学習中の学習者の回答；正答数（率）

x：２倍→ y：？倍	x：？倍 ←y：４倍	x：２個増→ y：？円増	x：？個増 ←y：240円増
33（91.7）	33（91.7）	31（86.1）	32（88.9）

n=34

く見られる。その結果,「逆」方向に限定すると正答数の上昇は殆どない。

「逆」方向は「ｙがｑ増える時，ｘはｑ÷ｋ増える」という割り算操作である。割合の文章題は,小学校の学習内容であるにもかかわらず,大人であっても難しい問題である（小野寺淑行1995）。「基準量〔もとにする量〕・比較量〔比べられる量〕・割合」の三者関係において，とりわけ,「基準量」を求める（比較量÷割合）第３用法の文章題は,「割合」を求める（比較量÷基準量）第１用法や「比較量」を求める（基準量×割合）第２用法の文章題と比べて難しいことが確認されている（小林寛子 2012)。この指摘を踏まえれば,「逆「方向操作は,「割合；第３用法」的な意味合いを持っているのではないだろうか。今回の「教授活動」によって学習者は図形領域まで「比例・関係操作」概念を広げたが，説明主体な「教授活動」だったため，数操作として「逆」方向操作まで修得ができなかったと考えられる。

【全体考察】

本実験は「２変数間の関係把握」の理解に重点を置き,「比例関係」の基本性質を基礎に据え,「三角形(平行四辺形)の求積公式」「円周公式」の理解を支援する一連の研究である。

今回はその内容を実験者が「授業」し，その有効性を探ったものである。結果，一番の問題である「増」操作において「求められない」という誤答はなくなっており，かつ事前から事後へ正答数の上昇が見られおり,「授業」は一定の効果を持ったと思われる。しかし,「逆」方向において「計算ミス」の誤答が多く見られ,「関係操作」を「数値操作」と関係づけることの重要性がより明確化されたとも言える。

かつて佐藤康司・斎藤裕は，ルールの獲得には,「内包と外延に関する双方向的な関連づけ」だけではなく,「ルールの適用そのものを促す」方策として「ルールの適用訓練」を併せて用いることの重要性を指摘した（1990)。今回も，そのことが確認されたとも言える。つまり，「比例関係」の性質を「三角形（平行四辺形）の求積公式」「円周公式」まで拡張・理解するには，ただその「論理」形態を提示するだけではなく，その数操作に習熟させること，言わば「適用訓練」もまた必要なのである。

総合討論

ある公式がわかるということは，その公式に数値を入れて計算できるということだけではなく,「ある変数の値が変化すると，一定の法則に従って，もう一方の変数も変化する」ことがわかるということを意味する。つまり,「数値操作」と「(変数間の）関係操作」両方ができて「公式」が理解できていると判断する。これまでの公式理解は前者に重きが置かれていた。しかし，後者の理解があってこその「公式理解」であろう。そのような観点から,「変数間の関係性」の理解が重要な公式として「比例」を取り上げ，一連の研究を行ってきた。「比例」はまさに「２変数間の関係把握」がその理解の基本であり，その関係操作は①右辺の値（ｘ）がｎ倍になれば左辺の値（ｙ）もｎ倍となる（ｙがｐ倍になればｘもｐ倍となる）②右辺の値（ｘ）がａ増えれば左辺の値（ｙ）はｋ〔定数〕×ａ増える（ｙがｂ増えた時ｘはｂ÷ｋ増える)の２点である。この２操作が自由に行えることが,「比例」を理解・活用できていると言えよう。このような比例関係は様々な領域で存在している。例えば，三角形や平行四辺形の求積公式も「比例関係」式であり，等速直線運動における移動距離と経過時間も，固定抵抗器を流れる電流も電圧に比例（オームの法則）関係にある。これらの公式を単に「数値を代入し答えを求めるもの」として理解するのでなく,「比例関係式」として捉えてその性質を理解することが，操作的思考の獲得の一歩と言えるのではないだろうか。

三角形や四角形の求積や円周の公式は，まさに「比例」関係式である。「比例」における「関係操作」理解が進めば，これらの問題に対しても同様な思考が可能となっていくのではないだろうか。つまり，これらの「公式」において「関係操作」ができることが重要であるならば，そ

の公式の基本形式である「比例」における「関係操作」の適用型として理解できることが，最も近道であるとして，構成法的実験研究を行ってきたのである。

ここで，本研究で採用している「構成法」について述べる。教育心理学新辞典（1969）によれば，「構成法」とは「比較研究法に対する語。すでに形成が可能であることが知られている行動の形成要因の寄与率を比較研究するよりは，むしろ特定の行動がいかなる要因によって形成が可能となりうるかを，要因の組み合わせによって実際に形成してみることによって，未知の因果関係を見出そうとする方法」とされる。実際の授業過程では一定の目標の達成が目指される（今回は，三角形や四角形の求積や円周の公式の「関係操作」の理解が目標値である）。したがって，現実的な目標値を設定する「教授－学習心理学研究」において効果を持つことが予想される要因を「退化」させている群（統制群）を設定するような研究手法（比較研究法）は採用しにくい。また，細谷純・宇野忍・阿部康一は，教授方略理論の成立には多数の「経験法則」の蓄積・確立が前提であり，授業過程に関する経験法則を得るためには「実現が期待される授業目標に対する種々の工作的試み（考えうる限りで最適と信じられる方略で教え学ばせてみる）蓄積が必要」としている（1974）。そのような研究手法を採って，「「比例関係操作を基盤」とした三角形や四角形の求積や円周の公式の「関係操作」の理解支援方略の追求を行ってきた。

結果，まずわかったことは，被験者である大学生において「三角形や四角形の求積や円周の公式」は「比例」関係式であると言う認識が弱いということである。どの実験でも，事前テストでは，基本の比例型である「一当たり量」問題においては比例の性質である「倍のきまり・増のきまり」は正答できているが，「三角形や四角形の求積や円周の公式」になるとできなくなっていた。同じ形式であっても，領域が異なるとその性質（きまり）を敷衍できないのである。結果，これらの領域では，公式の「数値操作」はできても「関係操作」はできないのである。その点を原点としてこれらの公式が「比例」関係であることを認知させ，そのことによって「関係操作」を可能とさせようとして，一連の実験研究を行ったのである。

実験結果から，以下のことが明らかとなった。

１－１．これらの公式が「比例」関係であることを認知させるのは，ただその形式の類似性を示すだけでは無理で，①その「きまり」を明示すること，②公式におけるその「きまり」を「数値操作」とともに確認する必要がある。

１－２．「問い」を出しっぱなしにするのではなく，①「答え」を即時的にフィードバックすること，②「板書」等も活用し，学習者に全て委ねるのではく「教授－学習活動」を丁寧に行う必要がある。

２．比例関係操作を見ると，「倍のきまり・増のきまり」があり，後者の方が難しく，後者を重点的に教授する必要がある。

３．「倍のきまり・増のきまり」においてもその問いの方向（順・逆）があり，「逆」方向の思考は難しい。そのために特に「逆」方向の「適用訓練」を行う必要がある。

これらの点を今後考慮していけば，三角形や四角形の求積や円周の公式の「関係操作」が容易となっていくと考えられる。

現在，思考プロセスよりも，「（答えを出す）手続き」や「（公式の）暗記」が学習であるという「暗記主義」的学習観が根強く見られる（市川伸一 1998）。同様な学習観（意味を理解しようとせず，機械的に覚えて済まそうとする「機械的暗記思考」学習観）の存在を藤澤伸介も指摘している（2002）。今回の研究は，そのような「結果主義・暗記主義」的公式理解をどう脱却させるのかについて，一つの方向を示したものだと考えている。公式を暗記してただ数操作するだけがその公式の理解ではないだろう。その公式の性質を理解し，「関係操作」できるよう援助することが数学教育に求められることなのではないだろうか。

文　献

藤澤伸介（2002）　ごまかし勉強－学力低下を助長するシステムー（上）新曜社

細谷純・宇野忍・阿部康一（1974）　日本教育心理学会における授業研究の現状　教育心理学年報 13　85-94

市川伸一（編著）(1998)　認知カウンセリングから見た学習方法の相談と指導　ブレーン出版
小林寛子（2012)　割合の第３用法における誤認識とその修正の試み　日本教授学習心理学会第８回年会予稿集　14-15
工藤与志文・白井秀明（1991)　小学生の面積学習に及ぼす誤ルールの影響　教育心理学研究 39　21-30
麻柄啓一（2009)　数字がないと公式が使えないのはなぜか－小学生の関係操作の成否とその原因－　教育心理学研究 57　180-191
岡田いずみ・麻柄啓一（2013)　数字がなくても公式をつかえるようにするにはどうすればよいか－中学生への操作的思考の援助－　教授学習心理学研究９　63-74
小野寺淑行（1995)　割合文章題の解決における情報処理の諸相（Ⅱ）－卒業後における問題理解・解決方略の実態－　千葉大学教育実践研究第２号　141-153
佐藤康司・斎藤裕（1990)　幼児の「動物概念」形成に関する構成法的研究　教育心理学研究 38　57-66
進藤聡彦・麻柄啓一（2013)　数学公式の適用に及ぼす抽象・具体表現の影響　日本教授学習心理学会第９回年会予稿集　16-17
牛島義友・阪本一郎・中野佐三・波多野完治・依田新（編）(1969)　教育心理学新辞典　金子書房　279

付 記

本研究は，新潟県立大学倫理委員会の承認を経て行われたものであり，本研究の調査対象者になることによる不利益・危険は，被験者となる学生に対して最大限配慮して行われている。

本論文は，
第１実験
「比例」関係の学習を用いた操作的思考・援助の試み〔日本教授学習心理学会第 11 回年会 2015〕
第２実験
「比例」関係理解を基盤とした図形（幾何）学習支援の試み〔日本教授学習心理学会第 12 回年会　2016〕
第３実験
「関係操作」理解支援を基盤とした図形学習・教授－学習方略の試みⅡ〔日本教授学習心理学会第 14 回年会　2018〕
を基に，作成されたものである。
※関連した研究として
「関係操作」理解支援を基盤とした図形学習・教授－学習方略の試み〔日本教授学習心理学会第 13 回年会　2017〕がある。この研究は，「比例群」の他に「分配法則群」(「分配法則」に焦点を当てて説明を行う群）を設け，その違いを調べたものである。両群に明白な差は見られなかったため，「比例」関係を基礎に据えた「三角形の求積公式」「円周公式」の理解を支援する一連の研究のみに限定し，本論文化した。