【研究論文】
（査読なし）

「相加平均」操作に焦点を当てた内包量の理解度調査とその学習支援方略の研究

斎藤 裕[1]*

算数（数学）教育において、『外延量』と『内包量』について、その性質の理解が重要となる。前者においては「長さ」「重さ」「体積」などが代表的であり、後者においては「速さ」「濃さ」「密度」などが代表される。このように実際的な量であるが、両者はその性質を異にする。その一例が「加法性」である。前者のみ、それを満たしている。中でも「平均」が問題である。内包量は非加法性のため、「相加」平均できないはずである。また、内包量も多岐に渡る。日常生活が内包量概念獲得に深く関与しているならば、各々の内包量概念は、どのような経験がなされているのかによって、その獲得状況に大きな差異が出てこよう。そこで、本研究では、被験者を大学生とし、内包量として「速さ」「濃度」「(人口）密度」を選び、それらについて“平均”について調査し、彼らレベルにおいて「内包量」についてどのような理解状態にあるのか確認することを第１目的とし、次に、内包量理解・学習支援方策の希求も第２の目的とする。具体的には、その援助方略として、1.比較する量の差を大きくすることによって、「相加平均」への違和感を喚起する。2.内包量の意味（求め方と性質）を「速さ」を例に説明する。という２方略を採用し、その有効性を検討した。

結果、1.「割合」について第３用法でも高い正答率を見せる学生が、『内包量の平均』問題では正答できない。2.３種の内包量において正答率に差がある。その分野理解程度に「内包量」理解が起因する。3.どの種の内包量においても「平均」に関する誤答は『相加平均』誤答が顕著。4.比較差を大きくすることによって「足して」平均することへ“アラート”（違和感の喚起）としようとしたが、不十分な結果となる。5.教えた内容には効果が見られたが、他の内包量への拡がりは不十分。となった。様々な内包量の「非加法性」理解の不十分さ（外延量的理解）は確認されたが、その修正が十分だったかと言えば、必ずしも満足が得られるものではなかった。今後、内包量学習支援を改善し、さらなる研究を行っていきたい。

キーワード：内包量、加法性、相加平均、違和感の喚起、大学生

問題と目的

算数（数学）教育において、『量』を「外延量(extensive quantity)」と「内包量(intensive quantity)」とに分けることは重要と考える。なぜならば、両者とも実際的な量として多く存在しているにもかかわらず、その性質を異にしているからである。「外延量」としては「長さ」「重さ」「体積」などが代表的であり、「内包量」としては「速さ」「濃さ」「密度」などが代表される。このよう両者とも現実生活において馴染みある『量』であるが、両者はその性質を異にしている。前者は「大きさ・広がり」の量であり、後者は「性質の強さ」を表す量である。この性質の違いが、両者の“操作”上の違いをもたらすことになる。最も明確な操作上の違いは、合併という操作に関してである。「外延量」は加法性を満たすのに対して「内包量」は満たさないのである。「内包量」の多くは、２つの外延量の商で生み出される。例えば、「速さ」は「距離÷

[1] 新潟県立大学人間生活学部子ども学科
*責任著者　連絡先：ysaito@unii.ac.jp
利益相反：なし

時間」で求められ、また「(物質) 密度」は「重さ÷体積」で求められる（分母にくる外延量を「土台量」、分子にくる外延量を「全体量」と呼称する)。その意味で「内包量」は関係概念形成の基礎となるものとも言える。藤村宣之(1990)は、この点を重視し、内包量のおけるつまづきは算数・数学教育において克服すべき１つの重大な問題であると指摘している。

佐藤(1991)は、内包量である物質密度理解の指標として、①物質の固有性として密度が認識されること，②密度・重さ・体積の３つの量の関係が理解できること，を挙げている。つまり、「物質密度」を「重さ」と「体積」から導き出されるものとして認識するのではなく、３者関係を理解しつつ、物質の特性として認識できることが、密度概念の獲得にとって重要だとの指摘である。

したがって、佐藤の指摘を踏まえ、かつ、物質密度に限定されることなく「内包量」の理解として重要な点は､以下の３点に集約されよう。

1. 独立性：全体量や土台量の多少に関係なく″強さ″として一定である。
2. 関係性：２つの量が既知の時に残りの″量″が求められる。
3. 操作性質：２つ以上の量を合併することはできない－非加法性－を理解する。

このような内包量理解への学習支援の方策として、麻柄啓一(1992a)は、以下の２点を提案している。

①内包量は「全体量÷土台量」で算出されて初めて存在する量ではなく、初めから存在する量であることを強調すること。
②学習の初期には､土台量や全体量と異なる外延量によって暫定的に内包量を定義すること。

確かに、定義と表示は別物である。麻柄が前出論文で紹介しているのだが､『人口密度』について、ある事典では「ある地域に居住する人口の粗密の度合いを示す数値。通常、人口をそれが居住する土地の面積で割り、単位土地面積当たりの人口で表示される」(日本大百科全集　小学館) と説明されている。ここでは「定義」と「表示方法」とが区別されている。内包量を外延量による計算によって求める量としてではなく、それ自体ある「量」として「定義」し、理解することは重要と考える。しかし、内包量は「強さ」の量であるが故に、「加法的でない量」である。その意味で、内包量の理解に「非加法性」も挙げなければならない。内包量について「加法的な量」である外延量的理解を勧めると、その特性である「非加法性」を誤らしてしまう危険性はないだろうか。麻柄（1992b）は、おとなは速さや人口といった概念について小学校以来学習を積み重ねており、これらの内包量の基本的性質は意識しなくともわかった状態にあると言う。しかし､必ずしもそうではないだろう。確かに、殆どのおとなは「速さ４０㎞／ｈの自動車と速さ５０㎞／ｈの自動車を連結しても（足しても)、速さ９０㎞／ｈにはならない」ということはわかっているだろう。しかし､「非加法性」の理解は、単に「たせない」ということに止まらない。『平均』の理解にも関係する。具体的に言えば､「速さ」は「たせない」だけではなく､“相加”平均もできないのである。『平均』には､“相加”“相乗”“調和”などがあり、一般的に「平均」と言うと“相加”平均を意味する。しかし、内包量である「速さ」において、この平均は求められない。「たせない」からである。はたして、おとなであっても、そのレベルまで理解できているのだろうか。「内包量」を“たせないこと”そして“２つの外延量の乗除によってのみ生み出されるものであること”を明確にすることも､「相加平均」的誤理解を防ぎ、内包量概念獲得を充実させるものと考える。

また､内包量も上述したように、多岐に渡る。松田ら（2000）は「日常生活の中で経験豊富だから速さのほうが密度より概念獲得が早い」と述べているが、日常生活が内包量概念獲得に深く関与しているならば、各々の内包量概念は、どのような経験がなされているのかによってその獲得状況に大きな差異が出てこよう。本研究では、被験者を大学生とし、内包量として「速さ」「濃度」「(人口) 密度」を選び，それらについて“平均”について調査し、彼らレベルにおいて「内包量」についてどのような理解状態にあるのか確認することを第１目的とする。

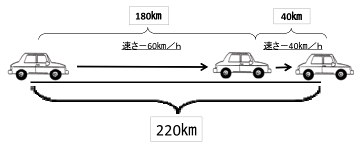
次に、麻柄の研究の志向がそうだったように、本研究も内包量理解・学習支援方策の希求も目的としたい。

蝦名正司（2014 2015）は「割合の問題に見られる不適切な加法操作の修正」に『違和感の喚起』の有効性を指摘した。つまり、加法操作を行うと違和感が喚起されるような事態の提示がその修正に有効だと言うのである。内包量は２つの外延量の商で生み出されるもので、言わば「割合」である。その意味で、この結果は示

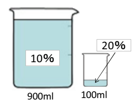
Ｉ平均問題：以下の問題で、適当だと思うものに〇をつけてください。

〔事前Ａ：差ー大〕

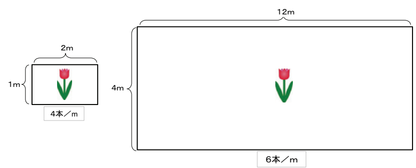
(1) ２２０kmの道を車で走りました。１８０km地点まで６０km／ｈの定速走行で走りましたが、残り４０kmの地点からスピードを落として、４０km／ｈでの定速走行をしました。平均の速さはどうなっていますか。
＜Ａ１００km／ｈ Ｂ５０km／ｈ Ｃその他＞
※「Ｃ その他」を選んだ人へ；違う答えを答えられる人は、お答え下さい。



(2) １０％の食塩水９００ｍｌと２０％の食塩水１００ｍｌを混ぜたら、その濃度はどうなりますか。＜Ａ３０％　Ｂ１５％　Ｃその他＞
※「Ｃ その他」を選んだ人へ；　違う答えを答えられる人は、お答え下さい。

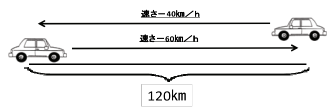


(3) チューリップの“混み合い度”（本／㎡）とは、「一定の広さ（１㎡）あたりどれだけの本数が植えられているか」を計算したものです。
２㎡の畑では“混み合い度－４本／㎡”でチューリップを植えようとしています。
またもう１つの４８㎡の畑では“混み合い度－６本／㎡”で植えようとしています。
２つの畑が合併した時、新しい畑のチューリップは、“混み合い度”（本／㎡）どのくらいで植えることになりますか。＜Ａ１０本／㎡ Ｂ５本／㎡ Ｃその他＞
※「Ｃ その他」を選んだ人へ；　違う答えを答えられる人は、お答え下さい。

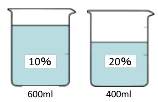


〔事前Ｂ：差ー小〕

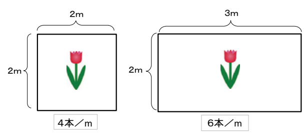
(1) 片道１２０kmの道を往復しました。行きは６０km／ｈの定速走行で、帰りはスピードを落として、４０km／ｈの定速走行をしました。往復の平均の速さはどうなっていますか。＜Ａ１００km／ｈ Ｂ５０km／ｈ Ｃその他＞
※「Ｃ その他」を選んだ人へ；　違う答えを答えられる人は、お答え下さい。



(2) １０％の食塩水６００ｍｌと２０％の食塩水４００ｍｌを混ぜたら、その濃度はどうなりますか。＜Ａ３０％　Ｂ１５％　Ｃその他＞
※「Ｃ その他」を選んだ人へ；　違う答えを答えられる人は、お答え下さい。



(3) チューリップの“混み合い度”（本／㎡）とは、「一定の広さ（１㎡）あたりどれだけの本数が植えられているか」を計算したものです。
４㎡の畑では“混み合い度－４本／㎡”でチューリップを植えようとしています。
またもう １ つの６㎡の畑では“混み合い度－６本／㎡”で植えようとしています。
２つの畑が合併した時、新しい畑のチューリップは、“混み合い度”（本／㎡）どのくらいで植えることになりますか。＜Ａ１０本／㎡ Ｂ５本／㎡ Ｃその他＞
※「Ｃ その他」を選んだ人へ；　違う答えを答えられる人は、お答え下さい。



〔事後：差ー小〕（ 図略 ）

(1) 片道６０kmの道を往復しました。行きは３０km／ｈの定速走行で、帰りはスピードを上げて、６０km／ｈの定速走行をしました。往復の平均の速さはどうなっていますか。＜Ａ９０km／ｈ Ｂ４５km／ｈ Ｃその他＞
※「Ｃ その他」を選んだ人へ；　違う答えを答えられる人は、お答え下さい。

(2) ３０％の食塩水３００ｍｌと４０％の食塩水２００ｍｌを混ぜたら、その濃度はどうなりますか。＜Ａ７０％ Ｂ３５％　Ｃその他＞
※「Ｃ その他」を選んだ人へ；　違う答えを答えられる人は、お答え下さい。

(3) ４㎡の畑では“混み合い度－４本／㎡”でチューリップを植えようとしています。
またもう１つの６㎡の畑では“混み合い度－６本／㎡”で植えようとしています。
２つの畑が合併した時、新しい畑のチューリップは、“混み合い度”（本／㎡）どのくらいで植えることになりますか。＜Ａ１０本／㎡ Ｂ５本／㎡ Ｃその他＞
※「Ｃ その他」を選んだ人へ；　違う答えを答えられる人は、お答え下さい。

FIGURE １　事前・事後テスト内容－「速さ」「濃さ」「密度」の平均問題

Ⅱ 割合文章題問題（共通）

(1) あるクラスで、その日、宿題を忘れた人の人数を調べたら、６人でした。それは全体の２０％に当たります。クラスは何人でしょう。(割合：全体・部分型－第３用法)

(2) バス代は去年２００円した。今年は１１０％になりました。今年はいくらでしょう。(割合：伸縮型－第２用法)

(3) 裕君は３０００円持っています。これは美知子さんの６０％にあたります。美和子さんはいくら持っているでしょう。(割合：対比型－第３用法)

FIGURE 2　事前テスト内容－「「割合文章問題」

唆に富もう。また、立木徹（1986）は、実験装置が大きいほどその装置から読み取る法則の獲得に効果があることを指摘している。立木は実験装置を大きくすることによって「(法則を理解する）手がかりの明瞭化」と「大きい驚き－知的好奇心の刺激－」をもたらし、そのことによって、法則の理解が促進されたのではないかと述べている。この２つの実験結果は、内包量の理解、それも「平均」の理解援助に対して重要な方策を示唆していると考える。

そこで、本研究では、平均を求めるために内包量を「相加」してしまわないための方策として、

1　比較する量を大きくする
2　内包量の意味（求め方と性質）を「速さ」を例に説する

を採り、

この方略が内包量で求める「平均」は「相加」ではないやり方だということを学生に意識させることに有効か否かの検討を行う。

方法

(1) 実験の概要

被験者は，大学１年生１年生（Ａ；16 名・Ｂ；14 名)。

被験者全員に調査問題〔２種類；Ａ・Ｂ〕(事前テストーテキストー事後テスト)が配布され、回答が求められる（30 分程度)。２種の調査問題によって、２群設定となる。

(2) テスト問題

①事前テスト

ターゲットとなる問題は「速さ」「濃さ」「密度」の平均問題である。比較する量の差の大小で２種類（２群）用意される。回答は選択であり、1)比較すべき量を加法した数値　2)両者を相加平均した数値　3)その他（違う答えを答えられる場合はその数値を記入）となっている。

また、両群の等質性・計算能力を測るために「割合文章問題」が３種（第３用法２問・第２用法１問）用意される（２群共通)。

②事後テスト

２群共通問題である。上記３種の平均問題であり、比較差は「小」設定となっている。ただし、事前テストにおける「差－小」とは数値が異なっている。回答様式は事前テストと同じである。

(3) 教授－学習活動：

①両群とも事前テスト終了後､「速さ」問題の答えが示された後、その驚き度（４段階）が問われる。

②その後、その説明（何故相加平均ではダメなのか;「速さ」の求め方と「速さ」を含む内包量の性質〔非加法性及びそれに付随する非相加平均性〕）を、テキストを通して学ぶこととなる。

テキストでは、「速さ」について、ｉ）それ自体独自の性質を持つ量である（独立性）が、ⅱ）実際は２つの量（外延量－“距離”“時間”）の計算によって求められる（関係性）ものであり、したがって、ⅲ）その“求め方”を含め、『速さ』をはじめ、その他の「内包量」はその性質上、“相加平均”ができないこと（←非加法性)、が説明されている。

③テキスト読解度、説明に対する納得度（４段階)が問われ､事後テストを受けることとなる。

結果と考察

(1) ２群の等質性と計算操作力

割合の文章題は、小学校の学習内容であるにもかかわらず、大人であっても難しい問題である（小野寺淑行 1995）。“基準量〔もとにする量〕・比較量〔比べられる量〕・割合”の三者関係において、とりわけ､「基準量」を求める（比

較量÷割合）第３用法の文章題は、「割合」を求める（比較量÷基準量）第１用法や「比較量」を求める（基準量×割合）第２用法の文章題と比べて難しいことが確認されている（小林寛子 2012)。

自動車はスピードメーターがあるので走っているその時の「速さ」がわかります。でも、その「速さ」はどうやって求めているのでしょう。
人は、“速さ”という性質を表すために、「時間」と「距離」を使うことにしました。
つまり、「一定時間で、どれくらい進めるのか」で、“速さ”を表すことにしました。
自動車のスピードメーターが『時速４０km＝４０km／h』を指している時、そのスピードが維持されると『１時間で４０km進む』ということを意味しているのです。

マラソンで約４０kmを走ることをまず例に考えてみます。オリンピック選手クラスだとマラソンの距離を約２時間で走りますね。どのくらいの「速さ」で走ったことになるでしょう。
約４０kmの距離を約２時間で走ったのですから、

４０km÷２ｈ（時間）＝２０km／ｈ（時速２０km）

約４０kmの走った平均の速さは「２０km／ｈ（時速２０km)」ということになります。
これは、マラソンの距離全体－約４０km－における『平均』の速さということです。だって、最初の１０kmはきっともっと速く走っているでしょうし、最後の５kmは疲れてしまって、もっと遅い「速さ」でしょう。
これは、あくまで約４０kmを２時間で走った場合の『平均』の速さということになります。
「距離」をかかった「時間」で割ることによってその距離における平均の速さを求めることになるのです。

速さ＝距離÷時間

自動車で１２０kmを走る時、前半の６０kmを「６０km／ｈ（時速６０km)」で走って、後半の６０kmを「４０km／ｈ（時速４０km)」で走った場合を考えてみましょう。自動車は１２０km走りました。
１２０km走った時の「速さ」はどのようにして求めますか。
速さは、「その距離をどれだけの時間をかけて走ったか」によって求められるのです。
この場合、距離は１２０kmです。かかった時間がわからなければこの距離における平均の「速さ」はわかりません。
そこで、まずかかった時間を求める必要があります。前半の６０kmを「６０km／ｈ（時速６０km)」で走りました。この距離でかかった時間はどのくらいかわかりますか。

「速さ＝距離÷時間 ⇒ 時間＝距離÷速さ」
↓
「６０km÷６０km／ｈ（時速６０km）＝１ｈ（１時間)」

後半の６０kmは「４０km／ｈ（時速４０km)」で走ったので、かかった時間は

「速さ＝距離÷時間 ⇒ 時間＝距離÷速さ」
↓
「６０km÷４０km／ｈ（時速６０km）＝１.５ｈ（１.５時間)」

１２０kmを２.５時間（１時間＋１.５時間）で走ったことになります。
↓
速さ：１２０km÷２.５時間＝４８km／ｈ（時速４８km）

「(６０km／ｈ＋４０km／ｈ）÷２＝５０km／ｈ」ではありません。
あくまで、速さはどれだけの距離をどれだけの時間をかけたかによって決まります。
それぞれの「速さ」(６０km／ｈ，４０km／ｈ）を足して２で割って（平均して）もダメなのです。

このように『数値』を足して“平均”する（「相加平均」と言います）できないものは「速さ」だけではありません。「混み具合（密度)」や「濃度」、「割合」もそうです。
数学的に、このような数（量）を「内包量」と呼びます。一方、足して平均を求めることのできる数（量）の代表は「長さ」や「重さ」です。これらの場合は、足したり引いたりすることができ、もちろん「足して平均を求める」こともできるのです。これらは「外延量」と呼ばれています。

「内包量」の多くは、２つの「外延量」の関係（通常、２つの外延量の割り算－商）によってのみ決まります（速さ；距離÷時間)。２つの外延量の割り算（商）で求められる「内包量」は「足す」ことはできません。したがって「足して割る」平均もできないのです。『内包量』は「物事の性質を表す量」と言われます。「性質」は足すことはできないと考えればいいでしょう。

FIGURE 3 テキストの概要

Table 1　割合文章問題の正答数

群＼割合文章題；類型	全体－部分型 第3用法	伸縮型 第2用法	対比型 第3用法
差大（16）	14	16	16
差小（14）	14	13	12

今回問題となる「内包量」も、前述したように、言わば「割合」である。３者関係の理解という意味で同様である。「速さ」に関しては“速さ・距離・時間”の３者関係に理解が問題となるし、「人口密度」に関しても“密度・人口（人数）・面積”の３者関係の理解が重要である。ターゲット問題は「速さ」「濃さ」「密度」の平均問題であるが、被験者となる大学生が「内包量」について「関係性：２つの量が既知の時に残りの″量″が求められる」が十分理解可能かどうかの確認として「割合・文章題－第２・３用法」を行ったのである。問題作成に当り、その型分けを含め、麻柄の 1988 年論文を参考にした。

TABLE１に被験者学生の割合文章題３問の正答数を示す。この結果を見ると被験者となった学生は、用法・型に関係なく高い正答率を示している。２群に違いは見られない。小林が調査対象とした大学生では明らかに第３用法の正答率が低かったが、今回の被験者大学生は「割合」に関して高い理解力・計算力を有していると言える。被験者学生は、「割合」について、計算操作能力として『関係性』理解は十分だったと判断できる。

(2)内包量の平均問題正答率から見る「内包量の非加法性」理解

TABLE２に内包量の平均問題の正答数（率）及び誤答傾向（差大群；16 名　差小群；14 名）を示す。この結果を見ると、全般的な正答率では、両群とも「割合文章題」での高い正答率と異なり、低くなっている。完答率で７割を超えるものはない。「割合」について第３用法でも高い正答率を見せる学生が、『内包量の平均』問題では正答できないという事実が判明した。誤答を見ると、「差小」群・密度問題で、誤答者のうち過半数（４／５）が『加法操作』誤答をしているという現象が特異的ではあるが、全体的傾向としては『相加平均』誤答が見られる。これらの結果から、問題となった３種の内包量において「相加平均」的誤理解が見られ、その意味では、「内包量の非加法性」理解が不十分なことが確認されたと言えよう。

また、３種の内包量における正答率の差を見ると、必ずしも同様な正答率ではない。「濃度」問題が比較的正答率は高く、「密度」問題は低いと言う傾向が見られる。やはり、松田らの指摘にあるように、日常経験などが理解の程度に差をもたらしている可能性が高い。しかし、誤答傾向では、「差小」群・密度問題を除き、３種とも『相加平均』誤答が顕著である。間違い方は種別なく同様なモノがあると言えよう。

(3)比較量差異設定の効果

事前テストにおいて「密度」問題を除いて比

Table 2　内包量の平均問題の正答数（率）及び誤答傾向（差大群；16名　差小群；14名）

＜事前＞　領域		速さ		濃度		密度	
群（問題別）		差大	差小	差大	差小	差大	差小
正答（完答）－率		11(9)－68.8	6 (5) -42.9	14(10)－87.5	10(8)－71.4	7(5)－33.3	9(6)－64.3
誤答	加える	0	0	0	1	0	4
	相加平均	5	8	2	3	9	1

＜事後＞　領域		速さ		濃度		密度	
群（問題共通）		差大	差小	差大	差小	差大〔NR-1〕	差小
正答（完答）－率		16(12)－100	14 (13) －100	15 (7) －93.8	11 (8) －78.6	11 (7) －68.8	12 (10) －85.7
誤答	加える	0	0	0	1	1	1
	相加平均	0	0	1	2	3	1

較量大群の方がやや正答率は高い。しかし、有意な程ではなく、「差小」群では「密度」問題で誤答者のうち過半数（４／５）が相加平均誤答をしている。

TABLE３は、「速さ」問題の答えの驚き度を見たものであるが、それを見ると、「小」群に違和感を感じている者が多くいる傾向が見られるが、これも有意な程ではない。比較差を大きくすることによって「足して」平均することへ″アラート″（違和感の喚起）としようとしたが，若干の喚起となる可能性に止まっている。この結果も併せてみれば、２つの「量」の差を大きくすることによって、「『相加平均』はできない」という意識の喚起をもたらそうとしたが、不十分であったと言えよう。

(4)教授－学習の効果

TABLE４はテキストに対する納得度を測った結果である。これを見ると、両群とも納得度は高いことが伺える。テキストは「速さ」に関しての説明(内包量としての特性・３量の関係性・操作性)が主な内容である。その内容の理解は、２群とも十分なされたと言える。事後テストにおける「速さ」平均問題の正答率が 100%となっている（TABLE２）ことからも、このことは確認される。

他の内包量（濃度・密度）平均問題の正答率

TABLE 3　「速さ」問題の答えの驚き度

反応＼群	差大	差小
えっ、信じられない！(1)	1	1
なんとなく納得できない(2)	5	7
やっぱりな、そうだと思った(3)	7	3
そんなの知ってた(4)	3	3
平均	2.8	2.6

も、事前から事後へ上昇している（TABLE２）。

TABLE 4　テキストに対する納得度

反応＼群	差大	差小
全然理解できない(1)	0	1
なんとなく理解できない(2)	0	0
まぁ大体理解できる(3)	11	8
完全に理解できる(4)	5	5
平均	3.3	3.2

しかし、『相加平均』誤答も減少しているが，完全に払拭されたと言う程ではない。残念ながら、密度問題で「差大」群における正答率は 70%に届かず、誤答の３／４が『相加平均』誤答である。その意味では、「比較量の差」の問題と併せて、テキスト改良の余地があると言えよう。

討論

算数（数学）教育において、『外延量』と『内包量』についてその性質の理解が重要となる。特に「内包量」は「割合」の問題もあり、その「非加法性」という性質の理解が重要と考える。その理解の確認として「『平均』をどうするか」に焦点を当て、大学生を対象に調査と教授－学習活動を行ったものが今回の研究であった。

結果、

1. 「割合」について第３用法でも高い正答率を見せる学生が、『内包量の平均』問題では正答できない。内包量の「非加法性」理解の不十分さ（外延量的理解）を確認。
2. ３種の内包量において正答率に差がある。その分野理解程度に「内包量」理解が起因する。
3. どの種の内包量においても「平均」に関する誤答は『相加平均』誤答が顕著。
4. 比較差を大きくすることによって「足して」平均することへ“アラート”（違和感の喚起）としようとしたが、不十分な結果となる。
5. 教えた内容には効果が見られたが、他の内包量への拡がりは不十分。

とまとめられる。

様々な内包量の「非加法性」理解の不十分さ（外延量的理解）は確認されたが、その修正が十分だったかと言えば、必ずしも満足が得られるものではなかった。内包量学習支援としては、改善が必要であろう。

今後の教授方略としての以下の改良点を提案し、この問題について教授学習実験を再度行っていきたい。

＜改良点＞

１被験者数の増員

比較差を大きくすることによって「足して」

平均することへ“アラート”（違和感の喚起）としようとしたが，若干の喚起となる可能性に止まっていた。それは、被験者学生の数が少なく、確認が十分できなかった可能性もある。次回は被験者数を増やし、この手法の有効性を再度検討する。

２「図」例示の不十分さの改良とテキスト内容の説明の付与

「密度」についてチューリップの植え方と混み合い度を例にしていたが、示された図が不明確（示されたチューリップはどの場合でも１本のみ）で分かりにくかった。また、教授文では、密度については例示のみで説明がなかった。この２点の改良を行う。具体的には問題で示されるチューリップの本数を明示的に図示し、教授文でも、「速さ」と同様な説明を行う。

　このような改良を行うことで、様々な内包量の基本的性質の理解の促進を図る教授方略を見つけていきたい。

文献

蝦名正司(2014).「違和感の喚起」が割合の加法操作の修正に及ぼす影響　日本教育心理学会第56回総会発表論文集 PF002.

蝦名正司(2015).違和感の喚起が数量関係の誤判断の修正に及ぼす影響（２）　日本教育心理学会第57回総会発表論文集 PA019.

藤村宣之(1990).児童期における内包量概念の形成過程について　教育心理学研究 第38巻 277-286.

小林寛子(2012).割合の第３用法における誤認識とその修正の試み　日本教授学習心理学会第８回年会予稿集 14-15.

麻柄啓一(1988).割合文章題の指導に関する実験的試み　千葉大学教育学部研究紀要 第36巻第１部 65-83.

麻柄啓一(1992a).内包量概念に関する児童の本質的なつまづきとその修正　教育心理学研究第40巻 20-28.

麻柄啓一(1992b).内包量概念に関する大学生のつまづき　千葉大学教育学部研究紀要 第40巻 55-62.

松田文子 永瀬美帆 小嶋佳子 三宅幹子 谷村亮 森田愛子(2000).関係概念としての「混みぐあい」概念の発達 教育心理学研究 第48巻 109-119.

小野寺淑行 (1995).割合文章題の解決における情報処理の諸相（Ⅱ）－卒業後における問題理解・解決法略の実態－　千葉大学教育実践研究 ２ 141-153.

佐藤康司(1991).教授ストラテジーの構成と改善に関する研究－「液体の密度」の学習について－　東北教育心理学研究 第４巻 15-24.

付記

　本研究は、新潟県立大学倫理委員会の承認を経て行われたものであり、本研究の調査対象者になることによる不利益・危険は、被験者となる学生に対して最大限配慮して行われている。